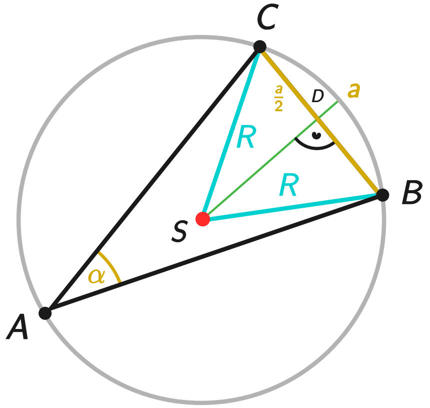
Zapamiętaj

Dowód twierdzenia sinusów

Wykażemy, że w każdym trójkącie stosunek długości boku (a) do sinusa przeciwległego kąta (α) jest równy średnicy ($2R$) okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozważymy 3 przypadki:

1. $\alpha < 90^\circ$ (kąt ostry)



1. $\measuredangle CSB = 2\measuredangle CAB = 2\alpha$

   (kąt wpisany i środkowy oparte na tym samym łuku)

2. $\measuredangle CSD = \frac{1}{2}\measuredangle CSB = \alpha$

   ($\triangle CSB$ jest równoramienny)

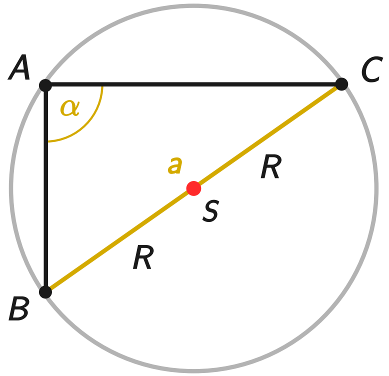
3. $CD = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}a$

   stąd dla $\triangle SDC$:

   $\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$

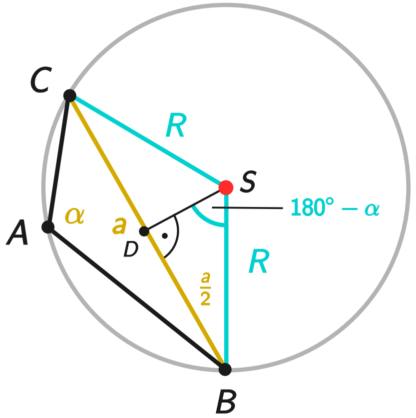
   $2R \cdot \sin\alpha = a$ czyli $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$

2. $\alpha = 90^\circ$ (kąt prosty)



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{2R}{\sin 90^\circ} = \frac{2R}{1} = 2R$$

3. $\alpha > 90^\circ$ (kąt rozwarty)



1. $\measuredangle CSB = 2\alpha$

   (kąt wpisany i środkowy oparte na tym samym łuku)

2. $\measuredangle DSB = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha$

   (kąt pełny, $\triangle CSB$ jest równoramienny)

3. $DB = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}a$

   stąd dla $\triangle DSB$:

   $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\frac{1}{2}a}{R}$

   $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$

   i dalej jak w przypadku **1.** $\square$