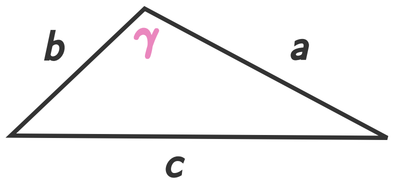
Zapamiętaj

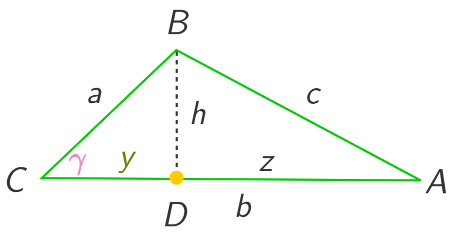
Dowód twierdzenia cosinusów

Wykażemy, że w każdym trójkącie:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos\gamma$$

1. $\gamma < 90^\circ$ (kąt ostry)



$\cos\gamma = \frac{y}{a}$ czyli $y = a\cdot\cos\gamma$

$a^2 = h^2 + y^2$ czyli $h^2 = a^2 - y^2$

$c^2 = z^2 + h^2$

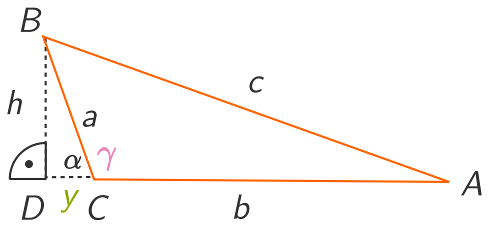
$c^2 = (b-y)^2 + a^2 - y^2$

$c^2 = b^2 - 2by + y^2 + a^2 - y^2$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2by$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos\gamma$

2. $\gamma > 90^\circ$ (kąt rozwarty)



$\cos\alpha = \frac{y}{a}$

$y = a\cdot\cos\alpha = a\cdot\cos 180^\circ - \gamma) =$

$= -a\cos\gamma$ ← wzór redukcyjny

$a^2 = h^2 + y^2$ czyli $h^2 = a^2 - y^2$

$c^2 = (y+b)^2 + h^2$

$c^2 = y^2 + 2yb + b^2 + a^2 - y^2$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2by$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2ba\cos\gamma$

3. $\gamma = 90^\circ$

wtedy twierdzenie cosinusów to po prostu twierdzenie Pitagorasa (przypadek szczególny) □